

- 1) Taylor pour $\sin$ et $\cos$
- 2) Opérations sur les D.L. ⚠ quotient
- 3) D.L. d'une fonction composée
- 4) Exemples de calcul de limites

autour de $x=0$

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ D.L. d'ordre n en $x=0$

$f(0) = 0$ $f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

On voit que $f^{(k)}(0) = 0$ si k pair

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \text{ si } k \text{ impair}$$

$$[k=1 \text{ donne } (-1)^0 = 1 \quad k=3 \rightarrow (-1)^1 = -1 \dots]$$

Pour écrire $\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$

explicitement, on écrit

par conséquent $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

$\hookrightarrow$ D.L. d'ordre $2n+1$ de $\sin x$ en $x=0$ peut s'écrire

$$\sin x = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{\textcircled{l}}}{(2l+1)!} x^{2l+1} + o(x^{2n+1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\textcircled{l} \rightarrow$ faux dans le polycopié

De même,
on obtient

$$\cos x = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{\textcircled{l}}}{(2l)!} x^{2l} + o(x^{2n})$$

2) Opérations sur les D.L. (prop. 5.5.4)

- Combinaison linéaire :

D.L. à l'ordre 3 en $x=0$ de $\sin(x) + 2\ln(1+x)$

$$\text{On a } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc

$$\frac{4-1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\sin x + 2\ln(1+x) = 3x - x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$= 3x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

- Produit: D.L. de $e^x \cdot \sin x$ à l'ordre 4 en $x=0$

Taylor: $g(x) = e^x$ $g^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow g^{(k)}(0) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$

$$\hookrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

D'autre part, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Alors

$$e^x \cdot \sin x = \left(1 + \boxed{x} + \boxed{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \cdot \left(x - \boxed{\frac{x^3}{6}} + o(x^4) \right)$$

$$x \cdot o(x^4) = o(x^5) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot o(x^4)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0$$

de même $x^2 \cdot o(x^4) = o(x^6)$, etc.

$$-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^3}{6} = -\frac{x^5}{12} = o(x^3) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow e^x \cdot \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Quotient: D.L. de $h_g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 5 en $x = 0$

Règle = Pour la D.L. de $\frac{f(x)}{g(x)}$ en x_0 ,
il faut $g(x_0) \neq 0$. Alors la D.L. s'obtient
en faisant la division euclidienne des D.L.
de f et de g , en prenant les ^{parties principales}
puissances dans l'ordre croissant (comme elles
apparaissent dans les D.L.)

[quand $x \rightarrow 0$, les termes qui dominent sont les termes de plus bas degré ;

$$\text{ex : } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

négligeables devant $x \equiv 0(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{3x^4 - x + 1} = \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^5 - 3x^6}{7x^2 - x^4} = \frac{1}{7}$$

Pour $h_g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ en $x = 0$ à l'ordre 5,

on utilise les D.L.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\textcircled{-} \quad \begin{array}{r} \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ \cancel{x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{+} \quad \begin{array}{r} \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{x^5}{30} \\ \cancel{\frac{x^3}{3}} - \frac{x^5}{6} \\ \hline \frac{2}{15} x^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \hline x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{120} - \frac{1}{24} &= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{24} \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\hookrightarrow \lg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \quad \text{au voisinage de } x=0.$$

3) D.L. d'une fonction composée

Ex. polycopié $\ln(\cos x) = \ln(1 + \underbrace{\cos x - 1}_{y \rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow 0 \text{)})}$

utiliser D.L. de $\cos x - 1$ en $x = 0$

et D.L. de $\ln(1+y)$ en $y = 0$

Ex: D.L. à l'ordre 3 de $\cos(\underbrace{\ln(1+x)}_{y \rightarrow 0 \text{ (} x \rightarrow 0 \text{)})}$ en $x = 0$

On utilise

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$$

et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Alors, on pose $y = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

qu'on injecte dans le D.L. de $\cos(y)$:

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \underbrace{o \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \right)}_{= o(x^3)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + o(\dots^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) + \underbrace{o \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \right)}_{= o(x^3)}$$

$$\left[x^2 o(x^3) = o(x^5) = o(x^3) \right]$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow o \left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \right) = o(x^3 + o(x^3)) = o(x^3)$$

$$\text{Donc } \cos(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0).$$

4) Calcul de limites :

Ex. 1 : $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin^3(x)}{x^2(1-\cos x)}$ $\stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \dots \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \dots$

$\stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \dots = \pm \infty$

Plus simple : $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{1-\cos x} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin x}{1-\cos x} \stackrel{BH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\cos x}{\sin x} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))}$

) ou par
ouverture

$$= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1 - \frac{x^2}{6}}{\frac{x}{2}} = \pm \infty \quad \swarrow \text{les } o(x^3)!$$

Ex. 2 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sinh^2 x}{x^2 \sinh^2 x}$

IPE : $x^2 \sinh^2 x \sim x^4 \quad (x \rightarrow 0)$

Observation : le dénominateur est d'ordre (au moins) 4
car le D.L. de $x^2 \sinh^2 x$ est donné par

$$\sinh x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \sinh^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow x^2 \sinh^2 x = x^2 \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4\right) + o(x^4) = x^4 + o(x^4)$$

Conclusion : il faut aussi développer le numérateur

a) (ordn 4

$$x^2 - \sinh^2 x = x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + o(x^4) = \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sinh^2 x}{x^2 \sinh^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}.$$